MIPoM-2009

Champs gaussiens fractionnaires anisotropes

Jacques Istas
Grenoble, France
Projet ANR-GDSA

FBM

Champs indexés par $\mathbb{R}^d$ vérifiant:

- gaussien,
- isotrope,
- accroissements stationnaires,
- auto-similaire d'indice H,
- (centré).

FBM

- $X(O) = 0$ (p.s.)

- Variance des accroissements:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(x) - X(y))^2 &= E(X(x-y))^2 \\
&= \|x-y\|^{2H}\mathbb{E}((x-y)/\|x-y\|)^2 \\
&= \|x-y\|^{2H}\mathbb{E}(e)^2
\end{aligned}$$

e vecteur unité.

FBM

Pas de solution quand $H > 1$.

Unique solution, à une cte multiplicative près, quand $0 < H \leq 1$:

les browniens fractionnaires.

Représentation spectrale

$$X(x) = Ct \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i<x,u>} - 1}{\|u\|^{d/2+H}} dW(u),$$

W mesure brownienne sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Exemple

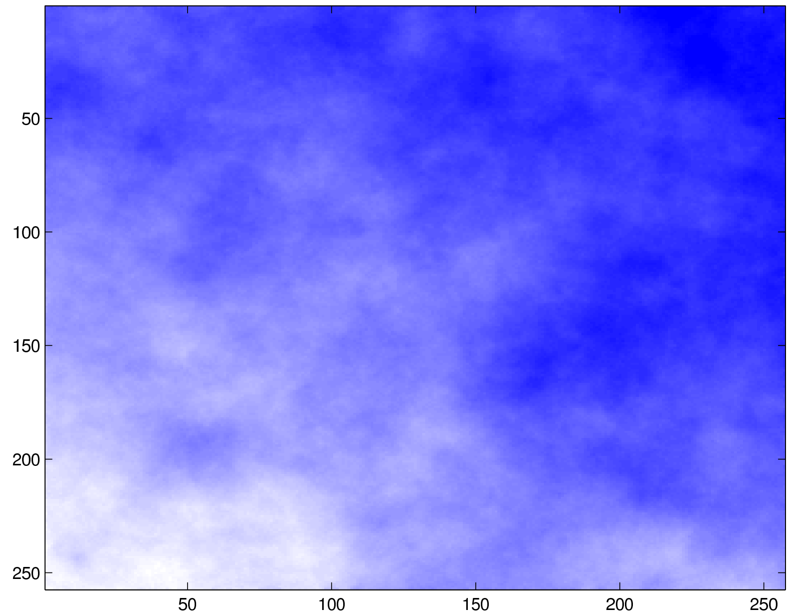

Figure 1: FBM $H = 0.7$, algo. FieldSim

Champs anisotropes?

On retire l'hyp. d'isotropie.

Restriction de X à une droite passant par O est un fbm

Tjs la condition $0 < H \leq 1$.

Représentation spectrale

Dobrushin (1979)

$$X(x) \quad = \quad Ct \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i<x,u>} - 1}{\|u\|^{d/2+H}} S(u/\|u\|) dW(u),$$

Quelques propriétés

Supposons S continue, non-nulle

- variance des accroissements

$$\mathbb{E}(X(x+h) - X(x))^2 \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{i<h,u>} - 1|^2}{\|u\|^{d+2H}} S^2(u/\|u\|) du,$$

- X $H - \varepsilon$ hölderienne, $\forall \varepsilon > 0$,

- X H-lass

Estimation de S?

En dim 1, $S = Ct$ cf. I. & Lang (97)

En dim > 1

Variance des accroissements

$$\mathbb{E}(X(x+h) - X(x))^2 \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{i<h,u>} - 1|^2}{\|u\|^{d+2H}} S^2(u/\|u\|) du,$$

Estimation avec avec des variations quadratiques??

Variations décalées

$$\Delta_{n,\mathbf{k},\mathbf{p},\ell}X \quad = \quad \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=0}^{K} a_j X\left(\frac{2^\ell\mathbf{k}+2^\ell j\mathbf{e}_i+\mathbf{p}}{2^n}\right) \; .$$

$$V_{n,\mathbf{p},\ell} \quad = \quad \frac{2^{(n-\ell)H}}{\prod_{i=1}^{d}(2^{n-\ell}-p_i-K)} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{2}^{n-\ell}-\mathbf{p}-\mathbf{K}} \Delta_{n,\mathbf{k},\mathbf{0},\ell}X\,\Delta_{n,\mathbf{k},\mathbf{p},\ell}X \; ,$$

Espérance des variations décalées

$$A(u) \quad = \quad \frac{1}{||u||^{H+d/2}} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=0}^{K} a_j e^{ij<\mathbf{e}_i,u>}$$

$$\mathbb{E}V_{n,\mathbf{p},\ell} \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<\frac{\mathbf{p}}{2^\ell},u>} |A|^2(u) S^2(u/||u||) du$$

Méthode d'estimation ponctuelle

- introduction d'un noyau,
- formule de Plancherel,
- variance des variations décalées et pondérées par le noyau,
- équilibrage des termes.

Résultats asymptotiques

- Estimateur consistant,
- Erreur quadratique en $2^{-n\gamma}$.